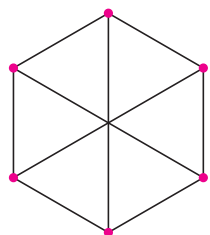
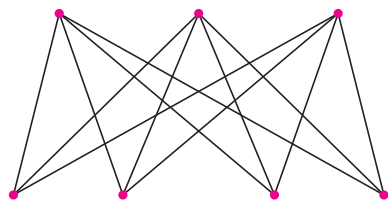


Rys. 1

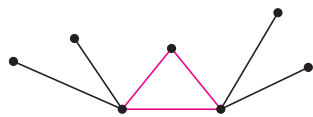


Rys. 2

Ktoś mógłby nam zarzucić, że w rzeczywistym świecie nici pajęczyn łączą się nie tylko w węzłach, ale również są posklejane w powietrzu, bez udziału elementów otoczenia. To prawda, ale w naszym świecie pająki nie rywalizują z nudów w tkaniu sieci, więc można założyć, że opisujemy sytuację z trochę innego świata. :)



Rys. 3



Rys. 4. Sąsiadujące węzły nie mogą mieć wspólnego sąsiada, gdyż wtedy mielibyśmy w naszym grafie trójkąt!

Było piękne październikowe popołudnie. Przez wychodzące na zachód okno wpadały do pokoju ciepłe promienie słoneczka, wprowadzając miłą atmosferę błędnego lenistwa. Pod sufitem siedziały na ścianie dwa pająki, które dalekowzrocznie schroniły się już wewnątrz domostwa przed jesienno-zimowym chłodem. Imiona pająków są nieistotne w tej historii. Wspomnijmy może tylko, że dopiero czytane od końca znaczyły coś w języku polskim. Aby przezwyciężyć nudę, większy pająk zaproponował mniejszemu utkanie pajęczyn, ale żeby było zabawniej, narzucił dodatkowe warunki, że pajęczyny muszą mieć po sześć węzłów (węzeł w pajęczynie to miejsce, gdzie nić przyklejona jest do otoczenia) oraz nie może być w niej trzech węzłów, które tworzą trójkąt, czyli dla dowolnych trzech węzłów w pajęczynie muszą istnieć wśród nich dwa niepołączone nicią. Mniejszy pająk przystał chętnie na taką propozycję, szczególnie że już powoli zaczynał głodnieć i należało zacząć myśleć o polowaniu. Po utkaniu zaledwie pięciu nici (rys. 1) zorientował się, że już w żaden sposób nie może dodać kolejnej, aby nie utworzył trójkąta. Jak złapać cokolwiek w tak rzadką sieć!? Spojrzał na pajęczynę większego pająka (rys. 2) i ze zdziwieniem stwierdził, że tamta złożona jest z dziewięciu nici. Całkiem porządna sieć! W oczekiwaniu na złapanie jakiejś zdobyczy, mniejszy pająk postanowił pomyśleć, gdzie popełnił błąd...

\*\*\*

My też zastanówmy się, jak powinien postąpić mniejszy pająk, aby jego sieć była lepsza. Najpierw sformalizujmy sobie pojęcie pajęczyny. W naszym przypadku dobrym dla niej modelem matematycznym jest graf. Graf składa się z węzłów oraz krawędzi i możemy sobie go wyobrażać jako rysunek, na którym węzły są punktami, a krawędzie to krzywe, które łączą niektóre z węzłów tak, jak nici w pajęczynie łączą jej węzły. Przykłady grafów można znaleźć na rysunkach na marginesie.

Problem naszych pająków to skonstruowanie 6-węzłowego grafu o możliwie dużej liczbie krawędzi niezawierającego trójkąta. Oczywiście, nie będziemy się ograniczać do tak małej liczby węzłów i od razu zajmiemy się tym problemem dla dowolnej liczby  $n$  węzłów. Szukamy największej możliwej liczby krawędzi w grafie o  $n$  węzłach niezawierającym trójkąta, czyli bez trzech węzłów połączonych krawędziami każdy z każdym. Skonstruujmy sobie pewien graf  $G$ . Mamy do dyspozycji  $n$  węzłów. Podzielmy je na dwie części tak równo, jak to tylko możliwe, tzn. jeśli  $n$  jest parzyste, to podzielimy węzły na dwie grupy mające tyle samo ( $n/2$ ) węzłów, a jeśli  $n$  jest nieparzyste, to w jednej grupie będziemy mieli jeden węzeł więcej niż w drugiej – grupy te będą miały liczebności  $(n-1)/2$  i  $(n+1)/2$ . Dwa węzły w naszym grafie będą połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy należą do różnych grup. Przykładowy graf  $G$  jest przedstawiony na rysunku 3. Zauważmy, że nie znajdziemy w nim trójkąta, ale już nie możemy dołożyć żadnej krawędzi bez stworzenia jakiegoś. A ile graf  $G$  ma krawędzi? W przypadku  $n$  parzystego  $n^2/4$ , a w przypadku przeciwnym... prawie tyle samo, a mianowicie jego liczba krawędzi jest największą liczbą całkowitą nieprzekraczającą  $n^2/4$ . Zatem w obu przypadkach liczba krawędzi nie przekracza  $n^2/4$ . Czy  $G$  ma dużo krawędzi? Okazuje się, że graf bez trójkątów, mający  $n$  węzłów, nie może mieć ich więcej! Można to wykazać, stosując indukcję matematyczną.

Będzie to indukcja po liczbie węzłów  $n$ . Dla małych wartości  $n$  z łatwością sprawdzamy, że nasze twierdzenie jest prawdziwe. Pierwszy krok indukcyjny mamy za sobą. Zabierzmy się za drugi. Weźmy dowolny  $n$ -węzłowy graf niezawierający trójkątów. Taki graf musi zawierać węzeł, z którego wychodzi mniej niż  $n/2$  krawędzi. Rzeczywiście! Weźmy dwa połączone krawędzią węzły. Nie mogą one oba być połączone krawędzią z tym samym węzłem, gdyż wtedy tworzyłyby we trójką zakazaną konfigurację – trójkąt. Zatem łącznie z naszych dwóch węzłów może wychodzić co najwyżej  $n-1$  krawędzi ( $n-2$  do pozostałych węzłów oraz jedna łącząca je), ale to oznacza, że z któregoś z nich wychodzi mniej niż  $n/2$  krawędzi, co chcieliśmy wykazać. Usuńmy ten właśnie węzeł i wszystkie wychodzące z niego krawędzie. Otrzymany graf ma  $n-1$  węzłów i nie zawiera trójkątów, bo się przecież żaden po usunięciu węzła nie mógł pojawić, więc z założenia indukcyjnego zawiera on co najwyżej

\*Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska



Taki graf nie może być niespójny, gdyż po dołożeniu krawędzi, łączącej węzły różnych składowych, trójkąt się pojawiać nie może. A spójne grafy  $n$ -węzłowe mają co najmniej  $n - 1$  krawędzi.

$(n - 1)^2/4$  krawędzi. Nasz wyjściowy graf zawiera wszystkie te krawędzie oraz krawędzie wychodzące z usuniętego węzła, których jest nie więcej niż  $(n - 1)/2$ . Stąd nasz graf ma co najwyżej  $(n - 1)^2/4 + (n - 1)/2 = (n^2 - 1)/4 \leq n^2/4$  krawędzi, co było do wykazania. Ponadto skonstruowany przez nas graf  $G$  jest jedynym, który realizuje tę największą liczbę krawędzi. Udowodnione przed chwilą twierdzenie nosi nazwę twierdzenia Mantela.

Gdy podstawimy  $n = 6$ , widzimy, że większy pająk utkał najlepszą możliwą sieć. A co z drugim pająkiem? On postąpił najgorzej, jak tylko można, gdyż, jak nietrudno wykazać,  $n$ -węzłowy graf niezawierający trójkąta o tej własności, że po dołożeniu dodatkowej krawędzi trójkąt się pojawia, nie może mieć mniej niż  $n - 1$  krawędzi.

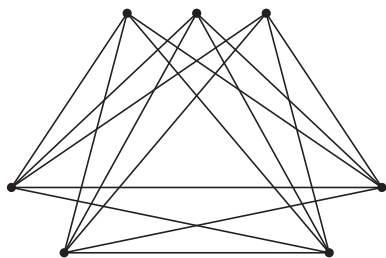
Czytelnik może spróbować skonstruować 6-węzłowy graf spełniający nasze warunki, mający jakąś pośrednią, między ekstremalnymi 5 i 9, liczbę krawędzi.

\*\*\*

*Po spalaszowaniu smakowitego komara mniejszy pająk zakrzyknął z tryumfem, że wie już, jak należy konstruować dobre sieci bez trójkątów. Wtedy większy pająk wysunął kolejną propozycję – utkania sieci, w której trójkąty mogą być, ale nie może być czterech węzłów, które byłyby połączone niemi każdy z każdym. . .*

\*\*\*

Hmmm. . . Pająki zadały nam nowe zadanie. Od razu zajmijmy się ogólniejszym problemem. Zbiór  $r$  węzłów w grafie, z których każdy z każdym jest połączony krawędzią, nazwiemy  $r$ -kliką (czyli trójkąty to 3-kliki). Teraz nasz problem wygląda następująco: ile najwięcej krawędzi może mieć  $n$ -węzłowy graf niezawierający  $r$ -kliki ( $r > 1$ )? Skonstruujemy sobie znowu graf. Nazwiemy go  $H$ . Mamy do dyspozycji  $n$  węzłów. Podzielmy je na  $r - 1$  grup. Krawędzie w grafie  $H$  będą znowu łączyć węzły wtedy i tylko wtedy, gdy węzły te należą do różnych grup. Nasz graf  $H$  nie zawiera  $r$ -kliki – jeśli wybierzemy dowolne  $r$  węzłów, to ponieważ grup jest tylko  $r - 1$ , co najmniej dwa węzły muszą należeć do tej samej grupy, a wtedy nie są one połączone krawędzią. Zatem nasze dowolnie wybrane  $r$  węzłów nie tworzy  $r$ -kliki w  $H$ . Dołączmy teraz do  $H$  dowolną krawędź. Wszystkie krawędzie pomiędzy różnymi grupami były już obecne w  $H$ , więc nasza dołożona dopiero co krawędź musi łączyć wierzchołki z jednej grupy. Wybierzmy z pozostałych  $r - 2$  grup po jednym węźle i dołączmy je do tych dwóch węzłów. Mamy  $r$  węzłów, z których każdy z każdym jest połączony krawędzią, zatem do  $H$  nie można już dołożyć żadnej krawędzi, tak aby cały czas spełniał nasze warunki.



Rys. 5. Przykład grafu  $H$  dla parametrów  $n = 7$  i  $r = 4$ .

Czy skonstruowaliśmy tylko jeden graf  $H$ ? Ależ wyszła nam cała rodzina grafów! Przecież kiedy dzieliśmy  $n$  węzłów na grupy, to mogliśmy uczynić to na wiele różnych sposobów (np. gdy  $n = 10$ , a  $r = 5$ , to mamy możliwości  $10 = 1 + 1 + 3 + 5 = 1 + 2 + 3 + 4 = 2 + 2 + 3 + 3$  i kilka innych). Jak powinniśmy podzielić nasze węzły na grupy, aby otrzymać największą liczbę krawędzi w tak skonstruowanym grafie? Otóż najlepiej tak równo, jak się da, tzn. tak, aby liczebności poszczególnych grup różniły się o co najwyżej 1. Tę odmianę grafu  $H$  oznaczymy przez  $T$ .

Wynika to z tego, że iloczyn  $k$  liczb sumujących się do ustalonej wielkości  $N$  jest największy, gdy każda z tych liczb równa się  $N/k$ , a w przypadku całkowitym sprowadza się to do warunku wymienionego w tekście.

A może jest możliwość skonstruowania grafu w zupełnie inny sposób tak, aby nie zawierał on  $r$ -kliki i miał jeszcze więcej krawędzi niż  $T$ ? Okazuje się, że nie! A graf  $T$ , nazywany grafem Turána od nazwiska słynnego węgierskiego matematyka, jest jedynym grafem realizującym tę największą (jaką?) liczbę krawędzi w  $n$ -węzłowym grafie bez  $r$ -klik. Czytelnika zainteresowanego większą ilością szczegółów na temat tego twierdzenia, zwanego – a jakże – twierdzeniem Turána, odsyłam do książki *Dowody z Księgi* autorstwa Aignera i Zieglera, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2002.

\*\*\*

*Skończyłem właśnie pisać artykuł do „Delty”. Przeciagając się, spojrziałem pod sufit i zobaczyłem, że mam tam całe mnóstwo pajęczyn o dziwnych, niecodziennych kształtach. Jedna nawet podobna była do grafu Turána. . . „Artykuł skończony – pora się wziąć za sprzątanie” – pomyślałem, zdejmując pajęczyny.*

