

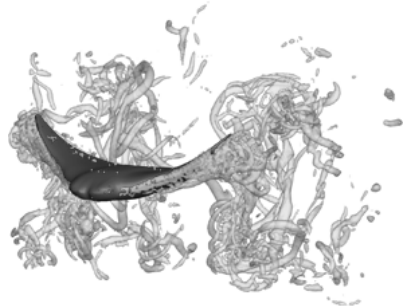
# Hydrodynamika i topologia

Grzegorz ŁUKASZEWICZ\*, Krzysztof MIZERSKI\*\*

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski  
 \*\* Instytut Geofizyki, Polska Akademia Nauk



Wir powietrzny (rurka wirowa) w tornadzie



Ryba płaszczka i struktury węzłowe rurek wirowych w wodzie wywołane jej ruchem

Hydrodynamika ma głębokie związki z topologią, i to od dawna, zanim jeszcze powstała nazwa „topologia” (zob. *Leonardo da Vinci i topologia*,  $\Delta_{22}^4$ ). Celem tego artykułu jest zwrócenie uwagi Czytelnika na współczesne powiązania tych dwóch dziedzin, które są ważną częścią badań hydrodynamicznych, mającą własną nazwę – „hydrodynamika topologiczna”.

Opowiemy o związkach hydrodynamiki z teorią węzłów (dziś częścią topologii), dla rozwoju której poważne motywacje znajdujemy w rozważaniach dziewiętnastowiecznych uczonych (takich jak Kelvin, Maxwell, Tait), między innymi właśnie w kontekście badań ruchu płynów, ale też elektromagnetyzmu i ogólniej – budowy materii (zwłaszcza wirowej teorii atomu Kelvina) [Epple].

Rozważmy model płynu nielepkiego i nieściśliwego, o stałej gęstości, wypełniającego całą dostępną przestrzeń. Można taki płyn rozważać w języku pola wektorowego prędkości płynu  $\vec{v}$  i ciśnienia płynu  $p$ , badając dynamikę pola prędkości płynu przy użyciu równania Eulera (zob. artykuł autorów w  $\Delta_{22}^5$ ). Alternatywnie, płyn można opisać poprzez pole wektorowe prędkości  $\vec{v}$  i pole wektorowe wirowości płynu  $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$  (o którym niżej), sięgając po równania opisujące dynamikę tego ostatniego. Okazuje się, że to drugie podejście jest bardzo owocne i pozwala na zdefiniowanie pewnych niezmienników topologicznych ruchu płynu. Zajmiemy się tu jednym z nich, a mianowicie *skrętnością* (*helicity*).

Wirowość  $\vec{\omega}$  pola wektorowego prędkości to nowe pole wektorowe, które opisuje rotację cząsteczek płynu wywołaną jego ruchem. Gdy stoimy na moście nad rzeką i patrzymy w dół jej nurtu, to możemy zaobserwować, że przy prawym brzegu ruch jest wolniejszy niż w głównym nurcie, stąd cząsteczki płynu obracają się tu w prawo, podobnie przy lewym brzegu, ale z tą różnicą, że tam cząsteczki obracają się w lewo. Wirowość to po prostu dwukrotność prędkości kątowej obrotu cząsteczek w płynie. Jest to wielkość określona osobno dla każdego punktu obszaru przepływu, a gdy prędkość płynu zmienia się w czasie, to również wirowość zależy od czasu.

Sama wirowość ma bardzo ważne dla zrozumienia hydrodynamiki własności – odkryte przez Williama Kelvina i Hermanna Helmholtza w połowie XIX wieku – mówiące o niezmiennikach ruchu. Będziemy z nich korzystać w dalszej części artykułu.

Odpowiednikiem pola wirowości w elektromagnetyzmie jest pole magnetyczne  $\vec{B}$ , stąd zainteresowanie nim Jamesa Maxwella i Williama Kelvina badających analogie pomiędzy hydrodynamiką a elektromagnetyzmem. Okazuje się, że pola wirowości  $\vec{\omega}$  oraz indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  w przypadku płynów przewodzących prąd elektryczny (jak np. płynne żelazo czy plazma) spełniają analogiczne równania, zatem mając intuicje w zakresie dynamiki jednego z tych pól, można lepiej zrozumieć pewne aspekty dynamiki drugiego z nich.

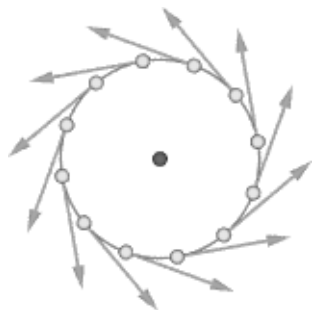
Ważnym pojęciem wiążącym hydrodynamikę (magnetohydrodynamikę) z topologią jest *skrętność* (odpowiednio: *skrętność magnetyczna*) ruchu płynu w obszarze  $V$ , zdefiniowana jako

$$\mathcal{H} = \int_V \vec{v} \cdot \vec{\omega} \quad (\text{skrętność}), \quad \mathcal{H}_M = \int_V \vec{A} \cdot \vec{B} \quad (\text{skrętność magnetyczna}).$$

$\vec{A}$  jest tu potencjałem wektorowym – analogonem wektora prędkości w hydrodynamice – a pole magnetyczne  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  odpowiada wirowości. Wielkości  $\mathcal{H}$  i  $\mathcal{H}_M$  są niezmiennikami ewolucji czasowej  $t$ , jak pokażemy poniżej, wiążą się z zachowywaniem topologicznych własności linii wirowości w przepływach.

Co mamy przez to rozumieć? Skupmy się na hydrodynamice.

Jeśli np. ruch płynu jest płaski,  $\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$ , to wektor wirowości ma postać  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ , tzn. jest prostopadły do płaszczyzny ruchu i  $|\omega|$  jest dwukrotnością

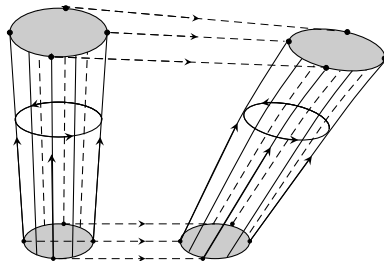


Pole wektorowe prędkości  $\vec{v}$  wokół rurki wirowej skierowanej prostopadle do płaszczyzny (por. zdjęcie tornada powyżej)

wartości prędkości kątowej obrotu hipotetycznej cząsteczki znajdującej się w danym punkcie przepływu. Zauważmy, że w przypadku takiego ruchu jego skrętność jest zerowa niezależnie od wielkości  $|\omega|$ , gdyż iloczyn skalarny wektorów prostopadłych jest równy zeru.

Prosty przykład ruchu o niezerowej skrętności opisuje pole prędkości zadane w punkcie  $(x, y, z)$  jako  $\vec{v} = (-y, x, 1)$ . Składowa ruchu  $(-y, x, 0)$  odpowiada za obrót w płaszczyźnie  $xy$ , a składowa  $(0, 0, 1)$  za jednostajny ruch prostopadle do tej płaszczyzny. Złożenie tych dwóch ruchów daje ruch spiralny prawoskrętny. Jednocześnie możemy w tym przypadku obliczyć, że  $\vec{\omega} = (0, 0, 2)$ , więc skrętność ruchu jest dodatnia ( $\vec{v} \cdot \vec{\omega} = 2$ ). Gdybyśmy rozważyli  $\vec{v} = (-y, x, -1)$  z przeciwnym znakiem na ostatniej współrzędnej, to wówczas ruch byłby lewoskrętny, a skrętność ujemna. Ta geometryczna asymetria została zauważona przez Kelvina i nazwana *chiralnością* – obiekt chiralny to taki obiekt, który nie jest identyczny ze swoim odbiciem zwierciadlanym. Zjawisko chiralności jest powszechne w przyrodzie (i niejednokrotnie było opisywane na łamach *Delty*, patrz lista artykułów na marginesie). Warto zaznaczyć, iż skrętność jest wyznacznikiem chiralności (czyli braku symetrii odbiciowej), innymi słowy niezerowa skrętność oznacza chiralność przepływu.

W lustrzanym świecie cząsteczek  $\Delta_{14}^6$ ,  
Co zobaczyła Alicja po drugiej stronie  
lustra?  $\Delta_{17}^5$ ,  
Jakie fale nas kręcą?  $\Delta_{18}^2$ ,  
Jak zrobić z fal pułapkę?  $\Delta_{18}^3$ ,  
O chiralności  $\Delta_{22}^1$ .



Rurka wirowa unoszona przez przepływ, w chwilach  $t = t_1$  i  $t = t_2$

Rozważmy teraz pewien obszar  $V_0$  wypełniony w chwili początkowej płynem, np. dość dużą kulę o tej własności, że na jej brzegu  $S_0$  wektor wirowości jest styczny do  $S_0$ . W dowolnej późniejszej chwili  $t$  obszar  $V_0$  może ulec zniekształceniu do  $V_t$  (mówiąc językiem technicznym, ruch poddaje obszar *homeomorfizmowi*  $V_0 \rightarrow V_t$ ), ale twierdzenie Helmholtza mówi, że własność styczności wektora wirowości do obrazu  $S_0$  pozostanie zachowana. Korzystając z tej własności oraz równania Eulera, wraz z twierdzeniem Kelvina o transporcie i twierdzeniem Greena, da się wykazać, że całkowita skrętność  $\int_{V_t} \mathcal{H}$  określona wyżej nie zależy od czasu, czyli jest niezmiennikiem ruchu.

Co ciekawe, zaobserwować to mógł już sam Kelvin, dysponując wspomnianymi twierdzeniami, ale mimo to w literaturze pojęcie skrętności pojawiło się dopiero w 1958 roku, też nie do końca zauważone przez następne 10 lat. Jego znaczenie jako niezmiennika topologicznego odkrył dopiero Keith Moffat w 1969 roku w kontekście ewolucji i oddziaływań struktur wirowych.

Wyobraźmy sobie *rurki wirowości*, czyli struktury wirowe stworzone z przylegających linii wirowości (takie jak na rysunku obok lub rysunku z płaszczką). Ponieważ linie wirowości są wmrożone w przepływ, tzn. unoszone przez przepływ (zgodnie z twierdzeniem Helmholtza), rurki pozostają rurkami wirowości w ewoluującym przepływie. Z wmrożenia wynika także, że rurki z „połączeniami” oraz „węzłami” (czyli „spiecione”) są także wmrożone i unoszone przez przepływ poprzez homeomorfizmy, zatem zachowują przynależność do topologicznych klas równoważności. Innymi słowy: typy węzłów i połączeń nie zmieniają się – wykluczone jest na przykład, by dwie splecione rurki się rozplotły. Ponadto z nieściśliwości przepływu wynika zachowanie objętości (a więc i masy) rurek strumieniowych, czyli objętość rurek jest również niezmiennikiem ewolucji. Kolejnym niezmiennikiem (będącym treścią twierdzenia Kelvina) jest strumień wirowości przez powierzchnię przekroju poprzecznego w dowolnym punkcie. Stąd nazwa – rurki strumieniowe. Do kolekcji fizycznych niezmienników poza wymienionymi (całkowita skrętność, objętość i strumień wirowości w rurkach) należy dodać jeszcze całkowitą energię – przy założeniu, że płyn jest idealny, brak w nim tarć lepkich powodujących dyssypację energii. Naturalnie powstaje pytanie: w jaki sposób te fizyczne niezmienniki są związane z niezmiennikami topologicznymi, czyli np. rodzajami węzłów czy złączeń lub liczbą złączeń?

Badaniem ewolucji topologicznych struktur rurek wirowych zajmuje się wspomniana na początku hydrodynamika topologiczna. Najprostszym przykładem jest rozciąganie – jeśli mamy rurkę w kształcie torusa, który zostanie rozciągnięty, czyli zwiększy swój obwód, konieczność zachowania strumienia i objętości rurki skutkuje zmniejszeniem się pola poprzecznego torusa



#### Rozwiązanie zadania M 1720.

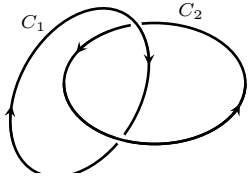
Nierówności można zapisać w równoważnej postaci

$$4(x_1^2 + \dots + x_n^2) < 2(x_1 + \dots + x_n) < x_1^3 + \dots + x_n^3,$$

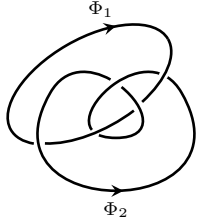
z której wynika, że przynajmniej jedna z liczb  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (niech to będzie  $x_1$ ) spełnia nierówność  $4x_1^2 < x_1^3$ . Zatem  $x_1 > 4$ , skąd

$$(2x_2^2 - x_2) + \dots + (2x_n^2 - x_n) < x_1 - 2x_1^2 < 4 - 2 \cdot 4^2 = -28.$$

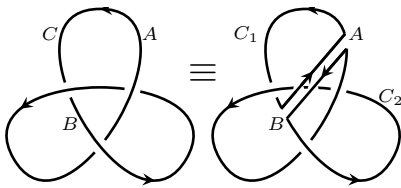
Ponieważ minimum funkcji  $2x^2 - x$  jest równe  $-1/8$ , to  $n - 1 > 8 \cdot 28 > 50$ .



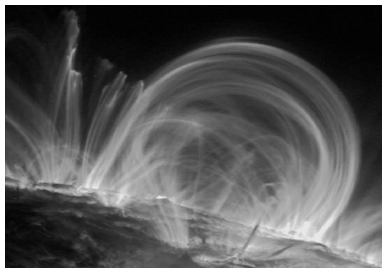
Rys. 1. Pojedyncze złączenie



Rys. 2. Zerowa liczba złączeń



Rys. 3. Pojedyncze samozłączenie



Pętle koronalne w atmosferze słonecznej

Uwaga dla miłośników topologii: hydrodynamika topologiczna opiera się w dużej mierze na teorii homologii i kohomologii, szczególnie w opisie ewolucji bardziej skomplikowanych struktur niż rurki wirowości (kontury), takich jak powierzchnie czy objętości.

#### Literatura

- M. A. Berger (2009), *Topological Magnetohydrodynamics and Astrophysics*, w: *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. Springer, New York.
- M. Epple: *Topology, Matter, and Space, I: Topological Notions in 19th-century Natural Philosophy*, Arch. Hist. Exact Sei. 52 (1998) 297–392.
- J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, MacMillan & Co., Oxford, 1873.
- H. K. Moffatt, A. Tsinohar: *Helicity in laminar and turbulent flow*, Annu. Rev. Fluid Mech. 1992.24: 281–312.
- H. K. Moffatt 1969, *The degree of knottedness of tangled vortex lines*, J. Fluid Mech., **35**, 117–129.
- R. L. Ricca 1998, *Applications of knot theory in fluid mechanics*, Banach Center Publications **42**, 321–346.

i jednoczesnym zwiększeniu natężenia pola wektorowego wirowości. W ten sposób ewolucja struktur wirowych odbywa się przy jednoczesnym zachowaniu topologii oraz wielkości fizycznych.

Istnieje twierdzenie wiążące całkowitą skrętność układu rurek wirowych  $\mathcal{H}_{tot}$  z parametrem topologicznym zwanym „liczbą złączeń” w następujący sposób:

$$\mathcal{H}_{tot} = \sum_i \mathcal{Z}_i \Phi_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} \mathcal{Z}_{ij} \Phi_i \Phi_j,$$

gdzie  $\Phi_i$  to strumień wirowości związany z  $i$ -tą rurką,  $\mathcal{Z}_i$  to tzw. „liczba samozłączeń” (patrz rys. 3 i jego opis poniżej) osi  $i$ -tej rurki, zaś  $\mathcal{Z}_{ij}$  jest liczbą złączeń pomiędzy rurkami  $i$  oraz  $j$ . Interpretacja geometryczna powyższych parametrów topologicznych  $\mathcal{Z}_i$  oraz  $\mathcal{Z}_{ij}$  przedstawiona jest na rysunkach obok, pochodzących z prac [Moffatt, 1969] oraz [Ricca, 1998] (zob. również [Berger, 2009]), gdzie w sposób przystępny objaśnionych jest wiele ciekawych dodatkowych przypadków. Przykładowo dla układu z rysunku 1 żaden ze złączonych pierścieni nie ma „samozłączeń”, zatem mamy  $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2 = 0$ , zaś  $\mathcal{Z}_{12} = -1$ , ponieważ mamy jedno złączenie pierścieni, a znak ujemny bierze się z relacji zwrotów strumieni wirowości w obu pierścieniach (orientacja konturu  $C_2$  ma przeciwny znak do strumienia wirowości  $C_1$  wewnątrz  $C_2$ ). Z kolei w sytuacji z rysunku 2 rurki wirowe również nie mają samozłączeń, jednak w tym przypadku mamy nietrywialne złączenie obu rurek, dla którego liczba złączeń wynosi zero,  $\mathcal{Z}_{12} = 0$ , i całkowita skrętność układu znika. Warto nadmienić, iż z możliwości wystąpienia takich sytuacji zdawał sobie sprawę już Maxwell (1873, tom II, str. 43) w swoich badaniach dotyczących złączeń obwodów elektrycznych.

Zajmijmy się teraz opisem samozłączeń dla jednej struktury wirowej. Rozważając jedną rurkę wirowości, samozłączenia można zrozumieć, analizując węzeł koniczynowy przedstawiony na rysunku 3. Aby określić liczbę samozłączeń, wprowadzamy dwa odcinki AB o równej co do wartości, ale przeciwnej co do znaku wirowości, co pozwala zachować cyrkulację po konturze  $C$ , zgodnie z twierdzeniem Kelvina. Wówczas widzimy, że wydzielone w ten sposób kontury  $C_1$  oraz  $C_2$  są ewidentnie niesplątane, ale złączone, i w rezultacie liczba samozłączeń w wyjściowym węźle to  $\mathcal{Z} = 1$ . Liczbę samozłączeń konturu  $\mathcal{Z}$  można rozłożyć na dwie składowe:

$$\mathcal{Z} = \text{Wr} + \text{Tw},$$

gdzie  $\text{Wr}$  (z ang. *writhe*) określa zawijanie osi rurki, zaś  $\text{Tw}$  (z ang. *twist*) jej całkowite skręcenie (torsje). Chociaż suma  $\text{Wr}$  i  $\text{Tw}$  jest niezmiennikiem topologicznym, to same te wielkości nimi nie są. Oznacza to, że „writhe” i „twist” zmieniają się pod wpływem ruchu płynu (homeomorfizmu), tak wymieniając się wartością, aby ich suma pozostawała stała. „Writhe” związany jest z ilością samoprzecięć rzutu osi rurki wirowej na pewną płaszczyznę, przy uwzględnieniu zwrotu linii, czyli zwrotu wirowości w rurce. Z kolei „twist” składa się z dwóch części – opisuje torsję osi rurki wirowej oraz wewnętrzne skręcenie linii wirowości wewnątrz rurki wirowej.

Jako sukcesy hydrodynamiki topologicznej w opisie ewolucji rzeczywistych układów obserwowalnych należy wymienić przede wszystkim dwa fakty. Wiemy już, że ewolucja płynów idealnych odbywa się przy więzach polegających na zachowaniu skrętności, a w konsekwencji zachowaniu również niezmiennika topologicznego, jakim jest liczba złączeń struktur wirowych. Otóż po pierwsze, istnieje twierdzenie mówiące, że taki więz nałożony na ewolucję prowadzi do „rozprostowywania” wszystkich punktów przegięcia osi rurek wirowych. Innymi słowy w stanie końcowym ewolucji oczekujemy, że rurki wirowe nie będą miały punktów przegięcia, i to niezależnie od stanu początkowego ewolucji. Jest to bardzo silny wynik, charakteryzujący struktury wirowe stanów ustalonych. Po drugie, powyższego więzu można użyć, by udowodnić, iż w stanie końcowym enstrofia (czyli średni kwadrat wirowości) czy też energia pola magnetycznego musi być nie mniejsza niż pewna wartość minimalna, zależna od strumienia związanego ze strukturami wirowymi bądź magnetycznymi (czyli  $\Phi_i$ ) i parametrów topologicznych tych struktur. Fakty te są z powodzeniem wykorzystywane w opisie produkcji oraz dyssypacji energii w koronie słonecznej, gdzie splecione struktury magnetyczne formują tzw. pętle koronalne.