



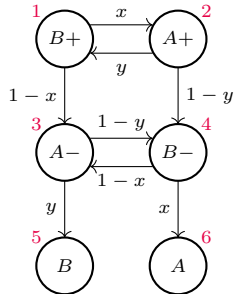
Łańcuchy Markowa – część 1

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Rozważmy następujące zadanie:

Dwóch zawodników – A i B – gra w szachy, przy czym A rozpoczyna. Każdy ruch może być dobry lub słaby. Wygrywa ten, kto jako pierwszy odpowie dobrym ruchem na słaby ruch przeciwnika. Zawodnik A wykonuje dobry ruch z prawdopodobieństwem x , a słaby z prawdopodobieństwem $1 - x$. Analogicznie dla zawodnika B z wartościami y i $1 - y$. Zakładamy, że $0 < x < 1$ i $0 < y < 1$. Dla jakich x i y zwycięstwa A i B są równo prawdopodobne?



Rozwiązanie. Zwróćmy uwagę, że póki nikt nie wygrał, sytuacja w rozgrywce zależy tylko od ostatniego ruchu. Są cztery możliwości: po dobrym/słabym ruchu zawodnika A/B . Oznaczmy je przez $A+$, $A-$, $B+$, $B-$. Moment, w którym zawodnik A rozpoczyna, możemy rozważyć oddzielnie, ale nie ma takiej konieczności, bo jest on równoważny sytuacji $B+$. Możemy więc przyjąć $B+$ jako punkt wyjścia. Do tego dołożymy jeszcze: A (A wygrał) i B (B wygrał). Na rysunku pokazano wszystkie sześć sytuacji, przyporządkowano im liczby od 1 do 6 oraz połączono je strzałkami opisującymi prawdopodobieństwa przejść.

Taki obiekt nazywamy skończonym łańcuchem Markowa. Jest on opisany przez pewien zbiór stanów S_1, S_2, \dots, S_n oraz prawdopodobieństwa $p_{i,j}$ przejścia w jednym kroku ze stanu S_i do stanu S_j dla wszystkich $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Oznaczmy to, że będąc w stanie S_i łańcuch z prawdopodobieństwem $p_{i,1}$ przejdzie do stanu S_1 , z prawdopodobieństwem $p_{i,2}$ do stanu S_2 i tak dalej. Dla każdego i zachowana jest równość $p_{i,1} + p_{i,2} + \dots + p_{i,n} = 1$. Stany S_i , z których nie można wyjść ($p_{i,i} = 1$), nazywamy pochłaniającymi. Interesuje nas prawdopodobieństwo zwycięstwa zawodnika A , czyli że proces zakończy się w stanie S_6 , pod warunkiem, że rozpoczął się w S_1 . Na ten problem trzeba spojrzeć ogólniej – niech q_i oznacza prawdopodobieństwo, że proces zakończy się

w stanie S_6 , pod warunkiem, że rozpoczął się w stanie S_i . Zwróćmy przy tym uwagę, że $q_6 = 1$ i $q_5 = 0$. Ze stanu S_1 można przejść do S_2 (z prawdopodobieństwem x) lub S_3 (z prawdopodobieństwem $1 - x$). Wynika z tego, że $q_1 = xq_2 + (1 - x)q_3$. Analogicznie otrzymujemy równości: $q_2 = yq_1 + (1 - y)q_4$, $q_3 = (1 - y)q_4$, $q_4 = (1 - x)q_3 + x$. Po rozwiązaniu układu czterech równań z niewiadomymi q_1, q_2, q_3, q_4 otrzymamy: $\frac{1}{2} = q_1 = \frac{x(1-y)}{(1-xy)(x+y-xy)} \iff x - y = xy(1-x)(1-y)$, więc dla x i y spełniających ostatnią równość obaj gracze mają jednakową szansę na zwycięstwo. Zauważmy, że w szczególności musi zachodzić $x > y$, gdyż prawa strona ostatniej równości jest dodatnia.

Zadania

- Kotek wędruje między domem, przedszkolem, ogrodem, polem i lasem. Zaczyna w ogrodzie – tam zawsze wybiera jedno z pozostałych czterech miejsc. W domu zawsze się bawi, a następnie idzie na pole lub do ogrodu. Po spacerze w lesie kot zawsze idzie albo do ogrodu, albo do przedszkola. Jeśli kot trafi do przedszkola, już stamtąd nie wychodzi (ach, te dzieci...). Zaś na polu kot łowi mysz i kończy wędrowkę. Obliczyć prawdopodobieństwo zakończenia wędrowki w polu. (Zakładamy, że wybory kota są losowe i zawsze jednakowo prawdopodobne).
- Student chce kupić swój ulubiony napój energetyczny, który kosztuje 5 złotych. Niestety, student ma tylko 2 złote. Postanawia w takim razie pójść do kasyna, w którym za postawioną złotówkę z prawdopodobieństwem p można wygrać 3 złote albo stracić postawioną złotówkę z prawdopodobieństwem $1 - p$. Student przestaje grać, gdy uzyska kwotę pozwalającą kupić napój albo gdy zostanie bez pieniędzy. W zależności od p wyznaczyć szansę na to, że student osiągnie swój cel. *Uwaga. Autor kącika zdecydowanie nie promuje napojów energetycznych ani tym bardziej hazardu.*
- Jaś i Małgosia rzucają uczciwą monetą. Jeśli w trzech kolejnych rzutach pojawi się konfiguracja ORR (O oznacza orła, a R reszkę), gra kończy się wygraną Jasia, a jeśli OOR – wygrana Małgosi. Wyznaczyć prawdopodobieństwo wygranej Jasia.
- Siedmioro dzieci stoi w kręgu i bawi się piłką. Każde z nich, mając w danej chwili piłkę, rzuca ją do dziecka stojącego bezpośrednio z lewej strony (z prawdopodobieństwem $p < \frac{1}{2}$) lub bezpośrednio z prawej strony (również z prawdopodobieństwem p) albo zabiera piłkę i wraca do domu (z prawdopodobieństwem $1 - 2p$). W zależności od p wyznaczyć prawdopodobieństwo, że do domu z piłką wróci to samo dziecko, które ją przyniosło.

Wskazówki do zadań

- Niech S_1, S_2, \dots, S_5 oznaczają kolejne pobyt kota w domu, przedszkolu, ogrodzie, polu i w lesie. Prawdopodobieństwa oznaczamy $p_{i,j}$ w stanie S_i . Oczywiście $p_{i,i} = 1$ i $p_{i,j} = 0$ dla $j > i$. Wartość q_i wyznaczamy, rozwiązując układ równań: $q_1 = \frac{1}{2}q_2 + \frac{1}{2}q_3$, $q_2 = \frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{2}q_4$, $q_3 = \frac{1}{2}q_4$, $q_4 = \frac{1}{2}q_3 + \frac{1}{2}q_5$, $q_5 = 0$. Stan S_6 dla $i = 0, 1, 2, 3, 4$ można utozsamnić z kwotą, którą ma student, a stan S_5 – to ten, w którym student ma 5 lub 6 złotych, czyli stać go na napój.
- Jako stany można w tym zadaniu wyróżnić start, O i R (wynik pierwszego rzutu oraz tych następujących po reszce), (wygrana Małgosi) i ORR (wygrana Jasia). Szansa na wygraną Jasia to $\frac{1}{3}$.
- Ciekawostka. Dla każdego wyboru konfiguracji trzech kolejnych wyników skutkujących wygraną Jasia Małgosia może wybrać inną konfigurację, która daje jej przewagę w takiej rozgrywce (RR oznacza O Reszka i OR Orzeł).
- Pomnijmy dzieci od 1 do 7 według kolejności stania w kręgu. Niech S_i będzie stanem, w którym i -te dziecko ma piłkę, a S_{i+1} – stanem, w którym i -te dziecko zabiera piłkę do domu. Załóżmy, że pierwsze dziecko przyszedł do domu, więc stanem początkowym jest S_1 , a interesuje nas q_8 . Rachunki znacznie ułatwią równości $q_2 = q_7$ i $q_4 = q_5$, które wynikają z symetrii.